数理解析研究所講究録
369巻 1979年 98-109

Twist-spun Knotsの Groupsについて

阪大 理学部 吉川克之

§1 Introduction まず，§2では n-winding bands $B_i^{(n)}$ を定義し，Zeemanの論文[9]にある twist-spun knotsをFoxの方法で構成する事について考える。§3では，いくつかの1-knotsに対して群 $G(k,n)$（§2で定義される）を計算し，2-knot groupsの torsion elementsについて考察する。§4では，群 $G(k,n)$ の centerについて言及する。

以後，次の様な記号が用いられる。

★ $H_+^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_4 \geq 0\}$

★ $H_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_3 > 0,\ x_4 = 0\}$

★ $R_t^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_4 = t\}$

★ $\gamma_3 : R_0^3 \longrightarrow R_0^3,\ (x_1, x_2, x_3, 0) \longmapsto (x_1, x_2, -x_3, 0)$

★ $\gamma_4 : R^4 \longrightarrow R^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, -x_4)$

★ $G' = [G, G]$ （Gは group）

§2 Two-spheres $S(k,n)$

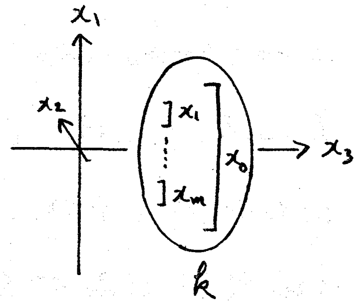


図1.

任意の1-knot k を，$k \subset H^3_+$ である様に取り，k は図1の様に $(m+1)$-bridge の形で与えられているとする。次に図2の様に，k とその mirror image $\gamma_3 k$ を overpasses x_0 と $\gamma_3 x_0$ の部分で composite する。そして左右対応する overpasses x_i と $\gamma_3 x_i$, $i=1,\cdots,m$ との間にまっすぐにはられた bands B_i を考える。これらの bands B_i, $i=1,\cdots,m$, による hyperbolic transformations を $k \# \gamma_3 k$ に行うことにより 2-disk $(D^2; k\#\gamma_3 k) \subset (H^4_+, R^3_0)$ が得られることが示される。

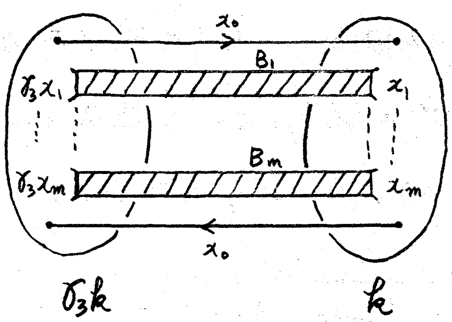


図2

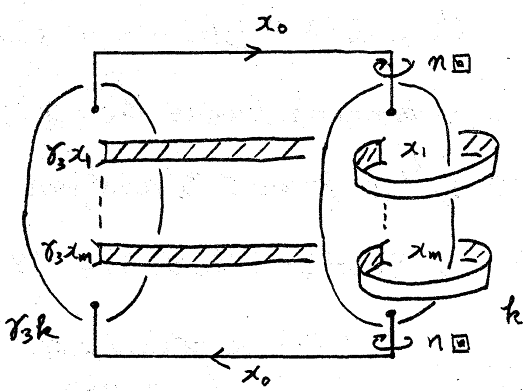


図3

次に，$\gamma_3 k$ を固定したままで x_0 を軸として右ネジの方向に k を n 回，回転させるという isotopic deformation を考える。この変形により bands $B_1,\cdots,B_m$ は図3の様に k に n 回，巻きつく。こうして得られる bands を B_i に対して，n-winding bands $B_i^{(n)}$ と言う。n-winding bands $B_1^{(n)},\cdots,B_m^{(n)}$ による hyperbolic transformations を $k\#\gamma_3 k$ に行うことにより 2-disk $(D^2;\ k\#\gamma_3 k)\subset(H^4_+,\ R^3_0)$ が得られることは，winding bands の構成の仕方より明らかである。こうして得られる 2-disk を，$D(k,\ B_i^{(n)})$ で表わす。

この 2-disk $D(k, B_i^{(n)})$ の group $\pi_1(H^4_+ - D(k, B_i^{(n)}))$ は，次の様になる。knot k による Wirtinger presentation を

$$G(k)=\langle x_0, x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_m \rangle$$

とすると，knot $\gamma_3 k$ による Wirtinger presentation は

$$G(\gamma_3 k)=\langle y_0, y_1, \dots, y_m : r_1', \dots, r_m' \rangle$$

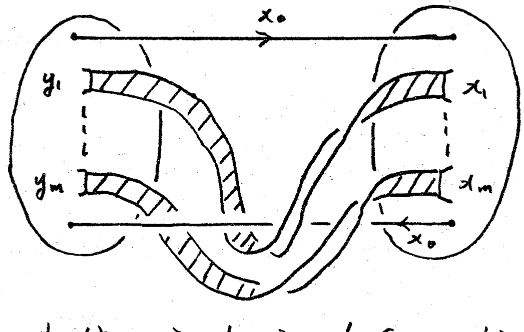
となる。但し，ここで $r_i' = r_i(y_0, y_1, \dots, y_m)$, $i=1,\dots,m$.

故に $G(k\#\gamma_3 k)=\langle G(k) * G(\gamma_3 k) : x_0 = y_0 \rangle$.

n-winding bands $B_i^{(n)}$ は，図4の様な bands と同じだから，各 $B_i^{(n)}$ に対応する relation は，$x_i = x_0^{n} y_i x_0^{-n}$ となる。

$\therefore\ \pi_1(H^4_+ - D(k, B_i^{(n)})) = \langle G(k\#\gamma_3 k);\ x_i = x_0^{n} y_i x_0^{-n},\ i=1,\dots,m \rangle$

図 4



n-winding bands は，isotopic deformation によって得られたのだから，次の prop. が成立することが容易に示される。

Proposition (2, 1).

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \pi_1(H^4_+ - D(k, B_i^{(n)})) \cong \pi_1(H^4_+ - D(k, B_i^{(0)}))$$

$D(k, B_i^{(n)})$を用いて2-sphere $S(k,n) \subset R^4$を次の様に定義する。

Definition (2,2).

$$S(k,n) \subset R^4 = D(k, B_i^{(0)}) \underset{\partial D(k,B_i^{(0)}) \overset{id.}{=} \partial \gamma_4 D(k, B_i^{(n)})}{\cup} \gamma_4 D(k, B_i^{(n)})$$

Remark (2,3).　この2-sphere $S(k,n)$は，Zeemanの論文[9]にあるkのn-twist-spun knotと同じtypeの2-sphereを定義する。

$S(k,n)$のgroup $\pi_1(R^4 - S(k,n))$を$G(k,n)$で表わす。$G(k,n)$のpresentationは，$D(k, B_i^{(n)})$のpresentationとvan Kampenの定理より

$$G(k,n) = \langle G(k \# \gamma_3 k) : x_i = y_i,\ x_i = x_0^n y_i x_0^{-n},\ i = 1, \cdots, m \rangle$$

となる。

$$\therefore G(k,n) = \langle G(k) : x_i = x_0^n x_i x_0^{-n},\ i = 1, \cdots, m \rangle$$

このpresentationより次のprop.が容易に証明出来る。

Proposition (2,4) (Zeeman [9]).

$$\forall n \in \mathbb{Z} : G(k,n) \cong G(k,-n)$$

Proposition (2,5) (Zeeman [9], Horibe [2]).

$$G(k, \pm 1) \cong \mathbb{Z}$$

prop. (2,4)より以後，$n \geq 0$とする。

§3 Groups $G(k,n)$ 1-knot k を具体的に与えて $G(k,n)$ を計算してみる。

Theorem (3, 1).

k : normal form (α,β) ($\alpha \geq 3$, α,β は odd, $0 \leq |\beta| < \alpha$, $(\alpha,\beta)=1$) を持つ 2-bridge knot

$$\Longrightarrow \quad G'(k,2) \cong \mathbb{Z}_\alpha$$

[証明] k は 2-bridge knot だから k の group G は

$$G = \langle x, y : y = LxL^{-1} \rangle, \quad 但し \ L = x^{\epsilon_1}y^{\delta_1} \cdots x^{\epsilon_p}y^{\delta_p},$$

$$\epsilon_i, \delta_i = 1 \text{ or } -1, \quad i = 1, \cdots, p, \quad 2p+1 = \alpha$$

という形の Wirtinger presentation を持つ。

$$\therefore G(k,2) = \langle x, y : y = LxL^{-1}, \ y = x^2yx^{-2} \rangle$$

各 i ($i = 1, \cdots, p$) に対して

$$\begin{aligned} x^{\epsilon_i}y^{\delta_i} &= x x^{\epsilon_i - 1} y^{-1} y^{\delta_i + 1} \\ &= x y^{-1} x^{\epsilon_i - 1} y^{\delta_i + 1} && \because \epsilon_i - 1 \equiv 0 \pmod 2 \\ &= x y^{-1} x^{\epsilon_i + \delta_i} && \because y^{\delta_i + 1} = x^{\delta_i + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore L = (xy^{-1}x^{\epsilon_1+\delta_1})(xy^{-1}x^{\epsilon_2+\delta_2}) \cdots (xy^{-1}x^{\epsilon_p+\delta_p})$$

更に $\epsilon_i + \delta_i \equiv 0 \pmod 2$ だから

$$L = (xy^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^{p}(\epsilon_i + \delta_i)}$$

故に defining relation $y = LxL^{-1}$ は、

$$\begin{aligned} y &= (xy^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^{p}(\epsilon_i+\delta_i)} x \left((xy^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^{p}(\epsilon_i+\delta_i)} \right)^{-1} \\ &= (xy^{-1})^p x (xy^{-1})^{-p} \end{aligned}$$

に reduce される。

$\therefore\ G(k,2) = \langle x, y : y = (xy^{-1})^p x (xy^{-1})^{-p},\ y = x^2 y x^{-2} \rangle$

$xy^{-1} = a$ とおく。

$$G(k,2) = \langle x, a ;\ a^{-1} = a^p x a^{-p} x^{-1},\ a = x^2 a x^{-2} \rangle$$
$$= \langle x, a ;\ a^{-1} = a^p x a^{-p} x^{-1},\ a = x^2 a x^{-2},$$
$$a^{-1} x a^{-1} x^{-1} = (a^p x a^{-p} x^{-1})(x a^p x a^{-p} x^{-2}) \rangle$$
$$= \langle x, a ;\ a^{-1} = a^p x a^{-p} x^{-1},\ a = x^2 a x^{-2},\ a^{-1} = x a x^{-1} \rangle$$
$$= \langle x, a ;\ a^{2p+1},\ x a x^{-1} = a^{-1} \rangle$$

$\therefore\ G'(k,2) \cong \mathbb{Z}_{2p+1} = \mathbb{Z}_\alpha$ Q. E. D.

Proposition (3, 2).

k を trefoil knot とすると次の事が成立する.

1) $G'(k,1) \cong 1$

2) $G'(k,2) \cong \mathbb{Z}_3$

3) $G'(k,3) \cong$ quaternion group

4) $G'(k,4) \cong \langle a, b : a^3 = b^3 = (ab)^2 \rangle$

$=$ binary tetrahedral group

5) (Zeeman [9]) $G'(k,5) \cong \langle a, b ;\ a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$

$=$ binary icosahedral group

6) $G'(k,6) \cong \langle a, b : [a,[a,b]], [b,[a,b]] \rangle$

$=$ rank 2 の free abelian group による $\mathbb{Z}$ の extension

[証明略]

Remark (3, 3).　　この prop. を用いて次の様な興味ある例を構成することが出来る。k を trefoil knot とする。

"2-spheres $S(k, 0), \cdots, S(k, 6)$ は，各 level t での cross sections $S(k, 0) \cap R^3_t, \cdots, S(k, 6) \cap R^3_t$ が R^3_t の中で，ambient isotopic である様にする事が出来るが，$S(k, 0), \cdots, S(k, 6)$ は，どの 2つも R^4 で ambient isotopic ではない。"

前半の部分は n-winding bands の構成の仕方より明らか。後半の部分も prop. (3, 2) より，それぞれの group が，同型でないことからわかる。

この例から cross sections から全体の 2-sphere を判断する場合には，十分な注意が必要である事がわかる。

次に 2-knot groups の torsion elements について考えてみる。Fox [1] は，任意の正奇数 $2n+1$ に対して order が，$2n+1$ の元を持つ 2-knot groups を構成した。また Zeeman [9] は，order が偶数となる元を持つ 2-knot group の例として prop. (3, 2) の $G(k, 5)$ を与えた。そこで次には，

Problem (3, 4) (Suzuki [5, problem 4.18]).

$\forall n(>0) \in \mathbb{Z}$ に対して order $2n$ の元を持つ 2-knot group が存在するか？

という事が問題となる。

この問題はまだ完全には解決されていないが，次の様に部分的な解答を与える事が出来た。

Proposition (3, 5).

nを正奇数とすると，

order $2n$及び$4n$の元を持つ 2-knot group が存在する。

つまり8の倍数以外のすべての正整数に対しては，それがorderとなる元の存在が示された。

[prop. (3, 5) の証明]　orderが，$4n$の元の存在を示せば十分である。kとして図5の様なpretzel knot $(p, q, r, \underbrace{\epsilon, \cdots, \epsilon}_{|2m|})$を取る。ここで，$p=\pm 2$, $q=\pm 3$, $r=\pm 3$, $\epsilon=\pm 1$とする。(図5は，(2, 3, 3, 1, 1)を表わす。) そしてϵの正負によりmに正負をつける。

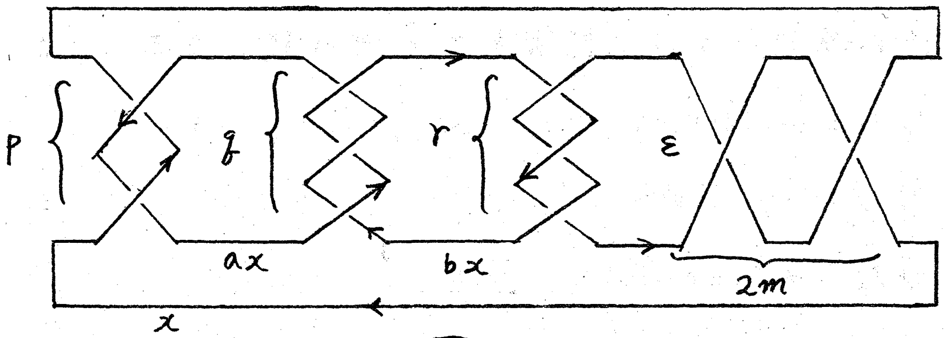


図5

このkに対する$G'(k, n)$を計算すると，

$$G'(k, 2) = \langle a, b \,;\, \bar{a}^{p} = (ab^{-1})^{q},\ a^{-2mpr-p} = b^{r} \rangle$$

となる。p, q, r, m の組み合せのうちで同じknotになるも

の及び mirror image となるものを除くと

1) $p=2$, $q=r=3$, m は任意

2) $p=-2$, $q=r=3$, 〃

3) $p=2$, $q=-3$, $r=3$, 〃

だけが残る。更に $G'(k,2)$ は,

$$G'(k,2)=\langle a,b,c : a^N=1,\ c^2=a^2,\ cac^{-1}=a^{2L+1},\ a^{-6mp-p}=b^3,\ bab^{-1}=c,\ bcb^{-1}=ca^4 \rangle$$

但し $N=24mp+4p+4p\delta+12$,

$L=6mp+p+p\delta+3$, $q=3\delta$

と変形出来る。

故に,この presentation より, $G'(k,2)$ は, $\langle a;a^N\rangle$ を $\langle c;c^2\rangle$ で extension し,更に $\langle b;b^3\rangle$ で extension したものである事がわかる。故に a の order は $|N|$ である。

N は各場合について計算すると次の様になる。

1) $N=4(12m+7)$

2) $N=-4(12m+1)$

3) $N=4(12m+3)$

$\therefore$ order $|4(12m+7)|$, $|4(12m+1)|$, $|4(12m+3)|$ の元が,存在する。 Q. E. D.

§4　$G(k,n)$ の center について　　1-knot group の center は，trivial であるか，infinite cyclic である事が知られている（Neuwirth[4]）。しかし 2-knot group の center が，一般にどの様な group になるかはまだ知られていないが $G(k,n)$ の center $C(G(k,n))$ については，次の事が成り立つ。

Theorem (4, 1).

$$C(G(k,n)) \cong \mathbb{Z} \oplus A \qquad (n \neq 0)$$

但し $A = C(G(k,n)) \cap G'(k,n)$

[証明]　　$C = C(G(k,n))$ とする。

明らかに $C \cong (C/A) \oplus A$ である。一方，

$$G(k,n)/G'(k,n) \geq (C \cdot G'(k,n))/G'(k,n)$$

であり，また

$$(C \cdot G'(k,n))/G'(k,n) = C/(C \cap G'(k,n)) = C/A$$

である。

$$\therefore\ G(k,n)/G'(k,n) \geq C/A$$

ところが，

$$x_0^n \in C,\ x_0^n \notin A,\ (n \neq 0)$$

だから $C/A \neq 1$.

故に $G(k,n)/G'(k,n) \cong \mathbb{Z}$ より

$C/A \cong \mathbb{Z}$.　　　　　　　　Q. E. D.

$A \neq 1$ となる例を次に与える。

Proposition (4, 2). k を trefoil knot とする。

1) $C(G(k,1)) \cong \mathbb{Z}$

2) $C(G(k,2)) \cong \mathbb{Z}$

3) $C(G(k,3)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

4) $C(G(k,4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

5) $C(G(k,5)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

6) $C(G(k,6)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

[証明略]

この prop. より 2-knot group でその center が trivial でも，infinite cyclic でもないものが存在し，更に，center の元で finite order を持つものが存在する。これらのことは，1-knot group の center と 2-knot group の center との間の違いの存在を示している。しかし一般に 2-knot group の center が，どの様な group になるかは，今後の問題である。

References

[1] R. H. Fox: "A quick trip through knot theory," Topology of 3-Manifold and Related Topics, Prentice-Hall, (1962), 120-167.

[2] M. Horibe: "On trivial 2-spheres in 4-space," Master's Thesis, Kobe Univ. 1974.

[3] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar: "Combinatorial Group Theory," Interscience Publ., New York, 1966.

[4] L. P. Neuwirth: "Knot Groups," Ann. of Math. Studies #56, Princeton Univ. Pr., Princeton, 1965.

[5] S. Suzuki: "Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere," Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 241-371.

[6] T. Yajima: "On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space," J. Math. Osaka City Univ., 13 (1962), 63-71.

[7] T. Yajima: "On simply knotted spheres in R^4," Osaka J. Math. 1 (1964), 133-152.

[8] T. Yajima: "On a characterization of knot groups of some spheres in R^4," Osaka J. Math., 6 (1969), 435-446.

[9] E. C. Zeeman: "Twisting spun knots," Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 471-495.